Agrandissement-Réduction d’une figure

Un Parcours d'Étude et de Recherche à partir de la quatrième

Groupe didactique de l'Irem de Bordeaux

Nous publions ici une version courte de cet article du groupe didactique de Bordeaux. La version complète est à lire sur le site de l'APMEP parmi les compléments en ligne de ce bulletin.

Cet article fait suite à la présentation de ce PER (Parcours d'Étude et de Recherche) lors d'un atelier des journées mathématiques de l'IFÉ (Institut Français de l'Éducation) au mois de juin 2013. Il s'inscrit dans un parcours plus large sur la proportionnalité en géométrie au collège qui fera l'objet de la publication d'une brochure rédigée par le Groupe didactique de l'Irem de Bordeaux.

Que signifie agrandir, réduire une figure ?

La notion d'agrandissement-réduction n’est pas véritablement une notion mathématique. Elle a été créée pour éviter de parler d'homothétie ou de similitude.

Cette notion n’est pas toujours définie de façon très rigoureuse dans les manuels de collège. Certaines rédactions qui y sont utilisées peuvent laisser penser qu’il suffit de multiplier les côtés d’une figure par un même nombre pour en obtenir un agrandissement.

Mais il faut faire attention : en effet, pour agrandir un carré ou un rectangle, il suffit de multiplier la mesure des deux côtés par une constante, tout en conservant la nature des figures, alors que pour un losange par exemple, cela ne suffit pas. Pour un triangle, soit on multiplie la longueur d’un seul côté et on conserve deux angles, soit on multiplie la longueur de deux côtés et on conserve l’angle compris entre les deux, soit on multiplie la longueur des trois côtés par le même facteur.

De façon générale, pour agrandir ou réduire une figure, il faut choisir les éléments qui suffisent pour reproduire la figure à une isométrie près (longueurs ou angles), puis multiplier les longueurs ainsi sélectionnées par un facteur constant et conserver les angles choisis.

Intuitivement, pour les élèves, quand on agrandit, on ajoute quelque chose (quand on agrandit sa maison, on ajoute une pièce !), quand on réduit, on enlève quelque chose. C'est donc un point important qu'il ne faut pas passer sous silence.

Le parcours proposé

Nous proposons un enchaînement de situations pour traiter le thème agrandissement-réduction au collège, que nous appelons « parcours » en référence aux PER (Parcours

d'Étude et de Recherche) théorisés par Yves Chevallard. Ce travail de l'IREM d'Aquitaine s'inscrit dans le cadre de la recherche PERMES (Parcours d'Étude et de Recherche en Mathématiques pour l'Enseignement Secondaire) en collaboration entre l'ADIREM et l'IFÉ (institut Français de l'Éducation, ex INRP).

Une raison d'être de ce parcours : le programme de quatrième réduit le théorème de Thalès au triangle et le relie au concept d'agrandissement-réduction de triangles.

Le parcours que nous proposons en classe de quatrième permet d'abord de faire émerger la proportionnalité et la conservation des angles, de considérer les agrandissements-réductions de figures en général pour aboutir au cas particulier des triangles et à la propriété de Thalès, « version quatrième ». Dans un deuxième temps, il permet d'initier la forme « classique » du théorème avec l'égalité des rapports puis la caractérisation graphique de la proportionnalité.

Les activités d'étude et de recherche (AER) qui constituent ce parcours utilisent un matériel concret simple, présent dans la classe, que les élèves peuvent manipuler (photos, triangles et rectangles à découper, …). La modélisation, nécessaire pour faire apparaître et comprendre le rôle des mathématiques, est très simple.

Les élèves utiliseront ici les outils habituels de la proportionnalité : schéma fléché, tableau, …, avec utilisation des coefficients de proportionnalité, de la propriété de linéarité. La progression proposée amène les élèves à découvrir et mettre en place d'autres outils : égalité de rapports, graphique, formule. La proportionnalité redevient donc objet d'étude avec sa caractérisation graphique, étude qui se terminera pour le collège par la fonction linéaire.

Ce parcours s'inscrit donc parfaitement en quatrième, dans le travail à mener sur la proportionnalité, et permet aussi de donner du sens à l'introduction de la notion de cosinus par exemple. Nous n'avons pas inclus l'AER sur le cosinus dans cet article mais elle s'articule parfaitement avec ce qui est proposé ici[1].

Après avoir brièvement rappelé les attendus du programme officiel, nous exposerons, dans une première partie, un enchaînement de trois situations sur le thème de l'agrandissement d'une photo, dans une deuxième partie, trois situations amenant la propriété de Thalès, dans sa « version quatrième ». Dans une troisième et dernière partie, et en guise de conclusion, nous proposerons la progression constituant le parcours annoncé, montrant l'imbrication de ces différentes situations entre elles ainsi que quelques activités complémentaires mais essentielles pour la cohérence du parcours.

Ce que disent les programmes

Classe de quatrième

1.1 Utilisation de la proportionnalité
Déterminer une quatrième proportionnelle.
Aux diverses procédures déjà étudiées s'ajoute le « produit en croix » qui doit être justifié.

(1) Vous pouvez trouver la situation sur l'introduction du cosinus en quatrième dans Petit x n° 65 (2004).

1.2 Proportionnalité
–* Utiliser dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité

3.1 Figures planes
Triangle : milieux et parallèles.
– Connaître et utiliser les théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle. Dans le cadre du socle commun, seules les propriétés directes de la droite des milieux sont exigibles.
–* *Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine*.
Le théorème de Thalès dans toute sa généralité et sa réciproque seront étudiés en classe de troisième.

3.3 Agrandissement-réduction
–* Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et de celles de la figure à obtenir.
Des activités de construction (avec éventuellement l'utilisation de logiciels de construction géométrique) permettent aux élèves de mettre en évidence et d'utiliser quelques propriétés : conservation des angles (et donc de la perpendicularité) et du parallélisme, multiplication des longueurs par le facteur k d'agrandissement ou de réduction, …
Certains procédés de construction peuvent être analysés en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle.

Classe de troisième
Configuration de Thalès.
– *Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux droites sécantes*.
– *Connaître et utiliser un énoncé réciproque*.
Il s'agit de prolonger l'étude commencée en classe de quatrième qui, seule, est exigible dans le cadre du socle commun.

Première partie : agrandissement d'une photo

Les objectifs visés ici, par cet enchaînement de trois situations, sont :

- d'une part, de reprendre l'apprentissage de la proportionnalité autrement qu'en termes de révision, en partant du cadre géométrique et en allant vers le cadre graphique (donc différemment des problèmes arithmétiques qui servent en général à exercer les élèves sur la proportionnalité depuis le cours moyen) ;
- d'autre part, de faire un premier pas vers la fonction linéaire et sa représentation graphique, en expliquant l'alignement des points et même la notion de pente d'une droite !

Agrandissement d'une photo, situation 1 : « partie intuitive »

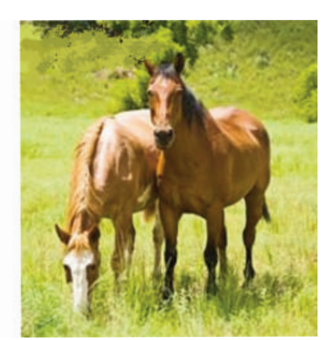
La consigne

Trois séries de photos sont proposées en vidéo-projection aux élèves.

Il leur est simplement demandé d'observer ces photos pour pouvoir ensuite faire des commentaires et des remarques oralement.

Première série :





Deuxième série :







Troisième série :





Dans la discussion en classe entière les élèves utilisent les mots « aplati, étiré, trop mince, plus large, déformé, agrandi pareil en longueur et en largeur, … ». Ceci permet de se mettre d'accord sur le fait que si une photo est correctement agrandie, tous les éléments de l'image sont agrandis « de la même façon », comme dans une maquette ou, à l'inverse, tous les éléments de l'objet sont réduits « de la même façon ».

Toutes les dimensions de la photo doivent être agrandies de la même façon, afin que les images ne soient pas déformées. Dans un premier temps, le professeur peut se contenter de cette formulation pour caractériser cette transformation : il s'agit d'une similitude, mais ce mot n'est pas introduit. Le programme parle d'agrandissement et

de réduction. Le mot « agrandissement » est ambigu : si j'agrandis ma maison, je rajoute une pièce, je ne fais pas une homothétie ni une similitude… Le recours à la photo permet au professeur de se faire bien comprendre sur ce qu'il entend par « agrandissement-réduction ». Si le mot proportionnalité est prononcé dans la classe, le professeur peut le reprendre, sinon il ne le prononce pas.

Le seul objectif de cette première situation est donc de « fixer » intuitivement avec la classe, la notion d'agrandissement-réduction : la conservation de la « forme ». Il n'est pas question ici d'envisager la conservation des angles, cela viendra plus tard.

Agrandissement d'une photo, situation 2 : la proportionnalité

La consigne

« On considère une photo qui est un rectangle de 4 cm sur 2 cm : je veux l'agrandir de sorte que la longueur qui est 4 cm devienne 7 cm.

Quelle est la largeur de la nouvelle photo ?

Indiquer les calculs faits et dessiner le rectangle représentant la photo agrandie. »

(La dimension 2 cm peut prêter à confusion avec le coefficient de proportionnalité 2 entre largeur et longueur du rectangle initial. On pourra éventuellement prendre un rectangle de 8 cm par 4 cm et demander que la largeur 4 cm devienne 7 cm.)

Voici différentes réponses ou procédures d'élèves qui ont travaillé sur une photo de 4 cm sur 2 cm.

a) « J'ajoute 3 cm pour obtenir 7 cm donc j'ajoute 3 cm à 2 cm pour obtenir la nouvelle largeur et j'obtiens 5 cm. »

b) Certains proposent : « $8 - 1 = 7$ donc $4 - 1 = 3$ ».

c) « 2 étant la moitié de 4, donc si la nouvelle longueur est 7 cm, on doit trouver, pour la nouvelle largeur, la moitié de 7 cm, soit 3,5 cm. »

d)

4	2
7	?

$? = \frac{7}{4} \times 2 = 3{,}5$, le coefficient de proportionnalité est $\frac{7}{4}$.

Ou $? = \frac{7 \times 2}{4}$ avec l'utilisation de l'égalité des produits en croix.

e)

4	7
2	?

$4 \times 0{,}5 = 2$ donc $7 \times 0{,}5 = 3{,}5$.
Dans ce cas, le coefficient de proportionnalité est 0,5.

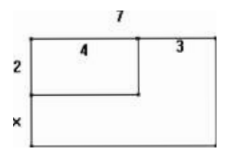
f) Certains élèves ont besoin de passer par l'unité. Ils parlent parfois de règle de trois.

g) D'autres élèves proposent un schéma fléché.

$$4 \rightarrow 7$$
$$2 \rightarrow ?$$

h) Un élève a résolu l'équation suivante : $4 \times ? = 7$. Donc $? = 7 \div 4 = 1{,}75$ d'où $2 \times 1{,}75 = 3{,}5$.

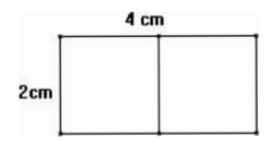
i) Certains élèves font le dessin ci-dessous mais ne parviennent pas à poursuivre.



Les élèves travaillent individuellement pendant une dizaine de minutes et le professeur n'intervient absolument pas pendant cette phase pour permettre à un maximum de procédures, justes ou fausses, d'émerger.

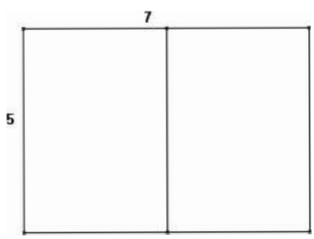
Sa première intervention sera de proposer aux élèves de « valider » ou non leur travail. En particulier, il s'agit de convaincre les élèves qui ont ajouté 3 cm à 2 cm ou ceux qui ont enlevé 1 cm à 4 cm que leur agrandissement ne convient pas, et les amener à remettre en cause leur procédure.

Pour cela, le professeur demande de tracer le rectangle initial et de constater qu'il est composé de deux carrés.

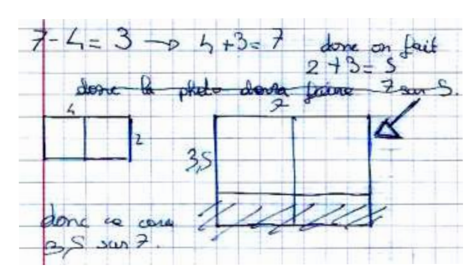


Les élèves peuvent maintenant vérifier si « dans » leur rectangle, ces deux carrés ont été agrandis correctement : c'est la conservation de la « forme » de la situation précédente.

Ces deux carrés le sont évidemment pour ceux qui ont utilisé la proportionnalité mais ce n'est pas le cas pour les autres. Par exemple, les élèves qui ont ajouté 3 cm à 2 cm obtiennent la figure suivante.

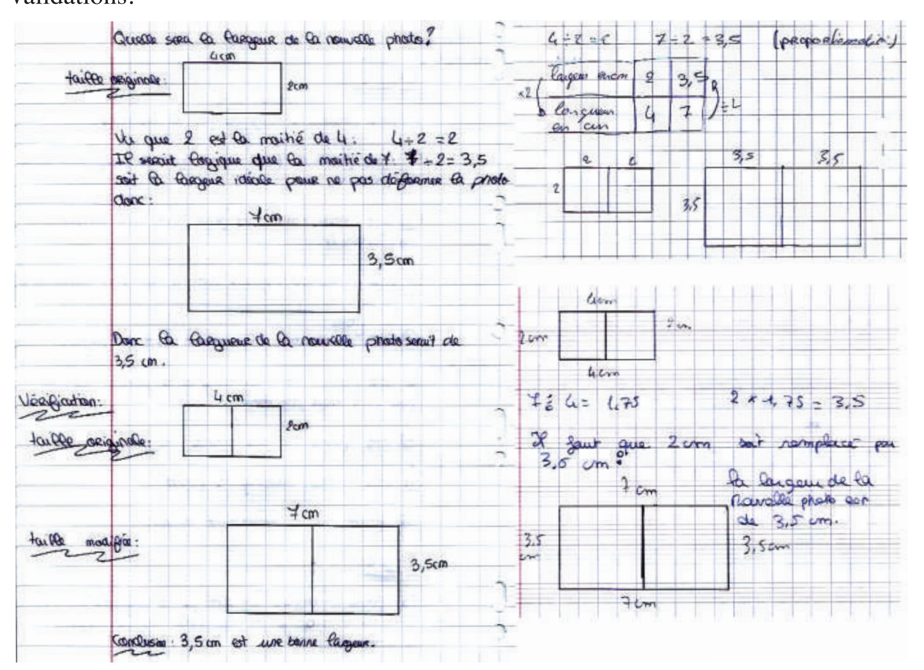


Ce moment de validation apparaît comme essentiel pour contrer le modèle additif comme le suggère le travail d'une élève ci-dessous.



La conservation des deux carrés lui permet de réaliser que son modèle n'est pas le bon et de « se corriger » pour obtenir la bonne réponse même si le modèle multiplicatif n'est certainement pas encore installé.

Voici quelques autres productions d'élèves illustrant différentes stratégies et leurs validations.



Une mise en commun a lieu ensuite pour trier les différentes procédures.

La proportionnalité ainsi mise en évidence, le professeur insiste sur les deux coefficients possibles, en reprenant par exemple les deux types de tableaux.

Longueur des photos	4	7
Largeur des photos	2	3,5

(× 0,5)

Ce premier tableau (voir procédure e dans la liste précédente) exprime la proportionnalité entre la largeur et la longueur des différentes photos : le coefficient est 0,5. La largeur mesure la moitié de la longueur quel que soit l'agrandissement choisi.

Dimensions de la 1ère photo	4	2
Dimensions de la photo agrandie	7	3,5

× 1,75

Ce deuxième tableau (voir procédure d dans la liste précédente) exprime que les dimensions de la photo agrandie sont proportionnelles aux dimensions de la photo de départ (coefficient de proportionnalité 1,75) quand on fait un seul agrandissement.

Le bilan de cette situation 2 pour les élèves est : pour agrandir une photo, toutes les longueurs doivent être multipliées par un même nombre et la « forme » doit être conservée (le rectangle « reste » un rectangle, le carré « reste » un carré).

La conservation des angles est ici implicite. Les élèves ne se posent pas la question car la forme rectangulaire est conservée.

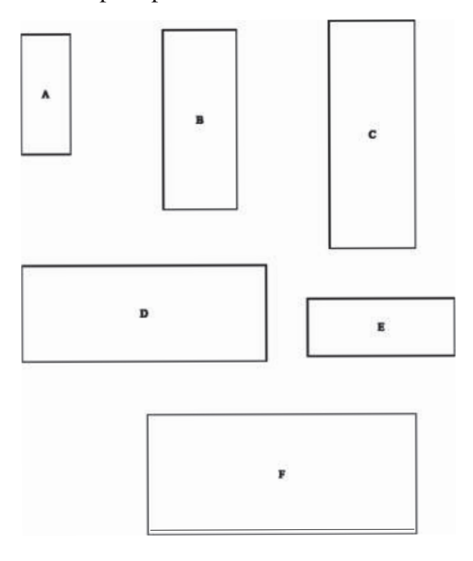
Cette problématique sera soulevée dans les activités d'agrandissements et réductions de losanges, trapèzes, …, s'intégrant dans le parcours et décrites dans la troisième partie.

Agrandissement d'une photo, situation 3 : aspect graphique

<u>La consigne</u>

« Découper soigneusement les 6 rectangles (ou photos) de la feuille distribuée par le professeur. **Les dimensions des rectangles ne sont pas marquées.**

Comment <u>sans aucun calcul ni aucune mesure</u>, trouver quels sont les rectangles qui sont des agrandissements du plus petit ? »



Le but de la situation 3 est d'arriver à la représentation graphique de la largeur de la photo en fonction de sa longueur sans formaliser davantage la fonction.

Les élèves doivent trouver un critère permettant de discriminer les agrandissements : il est attendu qu'ils empilent les rectangles, le critère cherché étant l'alignement des

sommets. Il est à noter que, à ce stade, les élèves auront déjà une expérience de « découpages et empilements » avec la première situation de la deuxième partie (la propriété de Thalès).

Cela revient donc à se convaincre que :

- si les points sont alignés, alors les dimensions sont proportionnelles ;
- si les points ne sont pas alignés alors les dimensions ne sont pas proportionnelles (contraposée de la réciproque de la première implication).

Autrement dit de l'équivalence entre l'alignement et la proportionnalité des dimensions.

Il y a « deux proportionnalités » : la proportionnalité entre les dimensions de la photo initiale et celles de la photo agrandie qui a été étudiée dans les deux premières situations et la proportionnalité entre les longueurs et largeurs des photos bien agrandies qui est plus particulièrement mise en évidence par l'empilement des rectangles dans cette situation 3.

Les dimensions des rectangles (non données aux élèves !) sont : (A), 5 cm par 2 cm ; (B), 7,5 par 3 ; (C), 10 par 4 ; (D), 11 par 5 ; (E), 6 par 2,4 et (F), 9,5 par 3,5.

Il y a trois agrandissements du rectangle (A) qui sont (B), (C) et (E), de sorte que les élèves puissent voir au moins quatre points alignés avec l'origine en plaçant astucieusement les rectangles.

Les rectangles (D) et (F) n'ont pas des dimensions proportionnelles à celle de (A) mais les écarts ne sont pas trop grands de façon à ce qu'on ne puisse pas s'en apercevoir sans placer les rectangles de cette façon. Cependant l'écart est suffisant pour être visible quand les rectangles sont bien placés, malgré de petites erreurs dues au découpage.

Voici des propositions des élèves.

a) Beaucoup d'élèves voient que le rectangle (C) a des dimensions doubles de celles de (A) et qu'on peut donc rentrer 4 fois le rectangle (A) dans (C). Ils sont convaincus que (C) est un bon agrandissement.

b) Ils essaient de procéder de même avec le rectangle (B) en coupant (A) en deux dans le sens de la longueur et de la largeur. Le rectangle obtenu rentre 9 fois dans le rectangle (B).

c) D'autres essaient de faire le même type de raisonnement pour le rectangle (D) : le rectangle (A) rentre 5 fois et demi dans le rectangle (D), en coupant (A) dans le sens de la largeur uniquement. Ils sont trompés par ce qui se passe avec (C) et pensent que, pour trouver un agrandissement, il suffit de trouver un lien entre l'aire de chaque rectangle et l'aire de (A).
D'autres élèves ne sont pas d'accord avec eux, ce qui entraîne un débat dans la classe.
Le professeur peut expliquer qu'il s'agit d'une fausse piste en montrant des rectangles dont l'aire est la même, ou le double ou le triple de celle du rectangle de départ et qui n'en sont visiblement pas des agrandissements.

d) Pensant au fait qu'avec certains logiciels, il faut tirer sur le coin de la photo

pour ne pas la déformer, certains élèves tracent une diagonale des rectangles et superposent les rectangles à partir d'un des sommets d'où part cette diagonale.

e) Quelques-uns tentent d'empiler les rectangles par leur centre (en utilisant la pointe de leur compas pour « piquer » les rectangles au centre !).

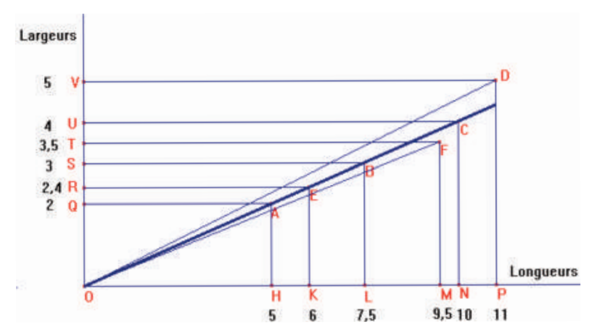
Dans cette situation 3, les élèves ont six rectangles, quatre ont des dimensions proportionnelles : ce qu'ils remarquent quand ils les empilent, ce sont les sommets qui ne sont pas alignés avec les autres. Ils envisagent facilement la proportionnalité dans le cas d'un alignement ou la non proportionnalité dans le cas contraire.

Le début de cette situation 3 est consacrée à l'action, les élèves ont trouvé une méthode pour décider des « bons et mauvais » agrandissements : superposer les rectangles.

Il s'agit maintenant de formuler des conjectures puis de se convaincre de leur validité :
- si les points sont alignés alors les dimensions sont proportionnelles ;
- si les points ne sont pas alignés alors les dimensions ne sont pas proportionnelles.

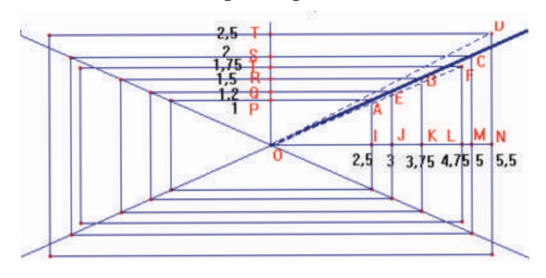
Le professeur donne maintenant les dimensions des rectangles et demande aux élèves de dessiner les rectangles superposés.

On obtient un dessin comme celui-ci.



Des élèves disent que ça ressemble à un graphique.

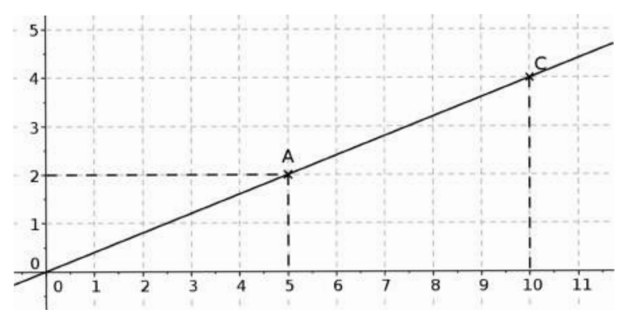
Ci-dessous, ce que l'on obtient en empilant par le centre.



La propriété de Thalès étant disponible au moment où cette situation 3 est traitée, le professeur propose des éléments de preuve des conjectures.

Tout d'abord, « si les points sont alignés alors les dimensions sont

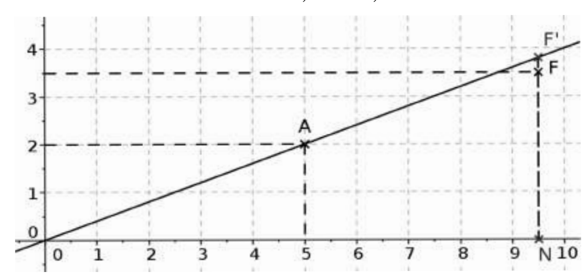
proportionnelles » : dans un repère où est placé le point A de coordonnées (5 ; 2), les élèves doivent placer le point d’abscisse 10 aligné avec O et A. Ils calculent son ordonnée en utilisant la propriété de Thalès et donc vérifient qu’il y a bien proportionnalité.



Pour la deuxième conjecture (« si les points ne sont pas alignés alors les dimensions ne sont pas proportionnelles »), les élèves rajoutent sur le graphique le point F de coordonnées (9,5 ; 3,5) qui n'est pas aligné avec O et A.

Le professeur leur fait alors considérer le point F' d'abscisse 9,5, aligné avec O et A et leur demande de calculer F'N.

$\dfrac{2}{FN'} = \dfrac{5}{9{,}5}$ donc F'N = 3,8 cm et donc $\dfrac{5}{9{,}5} \neq \dfrac{2}{3{,}5}$, il n'y a pas proportionnalité.



Pour terminer, les élèves doivent vérifier les résultats obtenus avec les rectangles empilés.

Le professeur leur demande de placer les dimensions des « bons » rectangles dans un tableau.

Ils cherchent alors à savoir si c’est un tableau de proportionnalité : le but est maintenant de mettre l'accent sur la proportionnalité « largeur-longueur » de tous les « bons » rectangles avec des coefficients (2,5 ou 0,4) qui ne dépendent cette fois que du rectangle (A).

Le professeur fait remarquer que le rapport de proportionnalité de ce tableau n’est pas le même que celui qui a été utilisé pour le théorème de Thalès. Les notions de coefficient directeur, de pente peuvent être évoquées !

Au final, dans cette situation, deux résultats essentiels sont dégagés, qui seront présentés aux élèves à l'aide d'exemples et que nous formulons ci-dessous pour le

professeur.

x et y étant les dimensions du rectangle initial, x' et y' celles du rectangle agrandi :

1) si les points sont alignés alors $\dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$ et si les points ne sont pas alignés alors $\dfrac{x}{x'} \neq \dfrac{y}{y'}$;

2) $\dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$ équivaut à $\dfrac{y}{x} = \dfrac{y'}{x'}$.

Ce dernier résultat, qui peut être démontré, sera aussi très utile pour la leçon sur le cosinus !
Tout est également en place pour caractériser graphiquement la proportionnalité en général.

Le lecteur pourra lire la suite de cet article avec **la deuxième partie, la propriété de Thalès**, et la **troisième partie, le parcours**, dans l'article intégral en ligne sur le site de l'APMEP.

Dans **la deuxième partie, la propriété de Thalès**, nous présentons un enchaînement de trois situations dont les objectifs sont de faire apparaître « naturellement » la configuration de Thalès, pour la première (sur une idée de l'Irem de Marseille), d'aborder la propriété en exploitant les connaissances des élèves en termes d'agrandissement-réduction pour la deuxième, et enfin, d'initier la forme classique de la propriété avec l'égalité des rapports, pour la troisième.
Des travaux d'élèves montrent la véritable activité mathématique induite par ces trois situations qui donnent du sens à la configuration ainsi qu'à la propriété dans son ensemble.

La troisième partie aborde, en guise de conclusion, **le parcours** tel que nous le proposons. L'imbrication des situations présentées dans les deux premières parties ainsi qu'avec d'autres moments d'études indispensables y est expliquée et justifiée, leur complémentarité mise en évidence.
Voici ce parcours sous forme synthétique.

Premier trimestre	Procédures de calcul d'une quatrième proportionnelle
	Théorèmes relatifs aux milieux des côtés d'un triangle
Deuxième trimestre	Agrandissement d'une photo, situations 1 et 2
	Agrandissements et réductions de figures en général
	La propriété de Thalès, situations 1 et 2
	La propriété de Thalès, situation 3
Troisième trimestre	Agrandissement d'une photo, situation 3

Nous invitons donc le lecteur intéressé à se reporter à l'article intégral pour bien appréhender le parcours dans son ensemble et en mesurer ainsi pleinement l'intérêt.

Deuxième partie : la propriété de Thalès

L'objectif de l'enchaînement de ces trois situations est de faire apparaître « naturellement » la configuration de Thalès, d'aborder la propriété en exploitant les connaissances des élèves en termes d'agrandissement-réduction pour enfin initier sa forme classique avec l'égalité des rapports.

La propriété de Thalès, situation 1 : vers la configuration

(Sur une idée de l'Irem de Marseille)

La consigne

Étape 1

« a) Tracer un triangle ayant un angle de 115° et un autre de 47°.

b) Que peut-on dire de tous les triangles de la classe ? »

La question b) est posée lorsque les élèves ont terminé de tracer leur triangle.

Certains ont du mal à utiliser le rapporteur surtout pour l'angle de 115°, il y a quelques erreurs de lecture des graduations. Ils tracent un angle de 65° au lieu de 115°, mais ils s'en aperçoivent rapidement car leur triangle ne ressemble pas à celui de leur voisin.

Les élèves sont vite persuadés que tous les triangles ont les trois mêmes angles ; le professeur les incite à le démontrer, ils utilisent la somme des angles d'un triangle vue en cinquième. Quelques-uns utilisent les termes d'échelle ou de proportionnalité sans préciser entre quelles grandeurs. Ils remarquent qu'il y a des grands triangles et des petits, mais ils ne savent pas le traduire avec des propriétés mathématiques.

La consigne (suite)

Étape 2

« Tracer sur la feuille blanche que je vous distribue un triangle ayant un angle de 115° et un autre de 47°, le plus grand possible entrant dans la feuille».

La solution experte consiste à calculer la mesure du troisième angle (18°) puis à placer le plus grand côté du triangle qui est celui opposé au plus grand angle. Le segment le plus grand que l'on peut tracer dans la feuille est la diagonale. Ce sera le grand côté du triangle. Ensuite, on trace les deux angles de 47° et 18°.

Les élèves entrent volontiers dans ce défi qu'ils pensent facile. Ils ont du mal à faire rentrer leur triangle dans la feuille car ils commencent par l'angle de 47° et celui de 115° et le triangle sort de la feuille ! Certains gomment et recommencent, d'autres ont des stratégies pour ne pas tout effacer. Ils rapprochent leur côté en traçant des parallèles successives, jusqu'à ce que la figure rentre dans la feuille.

Le professeur leur demande de découper les triangles qu'ils ont tracés, de mettre leur nom dessus et il ramasse les triangles. Si un élève les ramasse, il a tendance à les "caler" sur l'angle obtus... Certains reconnaissent alors des parallèles et s'interrogent déjà ! Certains élèves abandonnent la compétition, persuadés que leur triangle est trop petit.

La consigne (suite)

L'étape 3 se déroule à l'oral : le professeur dit aux élèves qu'il veut comparer les triangles qu'il a ramassés pour déterminer qui est le gagnant. Il veut le faire en économisant le plus possible la manipulation de son rapporteur pour gagner du temps.

Il leur demande donc de lui indiquer comment faire.

Les élèves proposent de vérifier soigneusement un des triangles avec le rapporteur puis de l'utiliser comme modèle. Ils suggèrent ensuite de superposer les autres triangles avec celui-ci en commençant par l'un des angles.

Le professeur le fait devant la classe avec un triangle T1 ayant un de ses angles faux. Les élèves disent que ce n'est pas correct car les côtés devraient se superposer, si l'angle par lequel on a superposé est bon. Ce n'est pas le cas, donc ces deux angles ne sont pas les mêmes. Si les deux

angles obtus ne coïncident pas, il est inutile de continuer avec ce triangle T1. Un de ses angles est



Le professeur vérifie un autre triangle T2. Si le premier angle essayé convient, les élèves proposent de superposer à nouveau les deux triangles en changeant d’angle pour vérifier les deux autres angles.

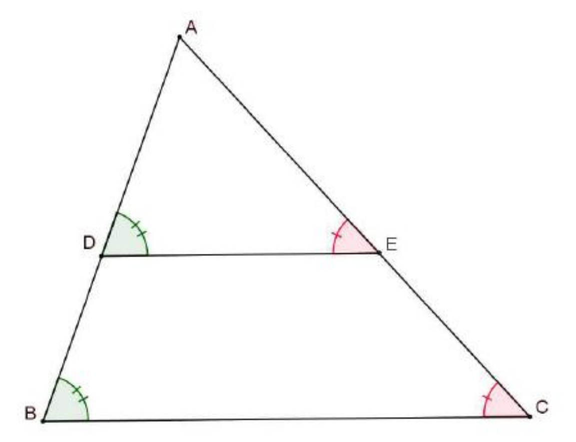
Le professeur le fait mais insiste en demandant s’il n’y a pas une méthode plus rapide car il doit vérifier de nombreux triangles…

Le professeur prend un autre triangle T3 qui a le bon angle au sommet sur lequel il superpose le triangle modèle mais un des autres angles faux. Des élèves disent alors que les troisièmes côtés des triangles devraient être parallèles, sinon les deux angles restants ne sont pas bons.

Les élèves proposent enfin de vérifier si les troisièmes côtés des triangles sont parallèles.



Le professeur peut alors faire un schéma au tableau représentant deux triangles superposés et incite les élèves à justifier leur conjecture concernant le parallélisme.



Les élèves le font en utilisant la propriété des angles correspondants.

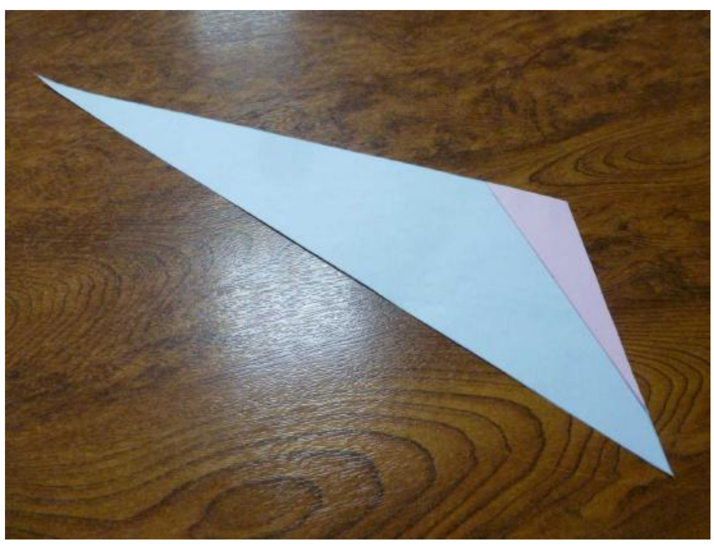
Ils savent depuis la cinquième que si les côtés sont parallèles alors les angles sont égaux et ils en concluent que si les côtés ne sont pas parallèles alors les angles ne sont pas égaux.

Le professeur rappelle qu'il y a équivalence entre l'égalité des angles correspondants et le parallélisme.

On peut alors déterminer le gagnant du défi !

Après la vérification par le professeur, ils veulent aussi vérifier si leur triangle n’a pas été éliminé injustement : les triangles leur sont rendus et ils superposent eux-mêmes leur triangle avec ceux des voisins.

Certains qui les ont superposés dans le mauvais sens n’ont pas leurs côtés parallèles.



Les autres leur disent qu’il faut retourner leur triangle car les angles à comparer doivent se trouver le long du même côté. Un retour à la démonstration précédente achève de les convaincre.

Avant de rendre leur triangle, quelques-uns ont déjà superposé leur triangle avec celui de leur voisin. Et s’ils pensent alors que leur triangle n’est pas bon, ils renoncent à participer au défi car ils n’ont pas le temps de le refaire. Ceux-là sont d'autant plus motivés pour voir avec le voisin si leurs angles coïncident ou non et surtout celui qui des deux a le plus grand triangle.

Le bilan de cette situation est donc : quand on superpose deux triangles ABC et ADE qui ont les mêmes angles, les sommets A, B, D d’une part et A, C, E d’autre part, sont alignés et les côtés (BC) et (DE) sont parallèles. Et réciproquement, si les points A, B, D et A, C, E sont alignés et les côtés (BC) et (DE) parallèles, les deux triangles ont les mêmes angles.

La propriété de Thalès, situation 2 : Thalès comme agrandissement-réduction de triangles

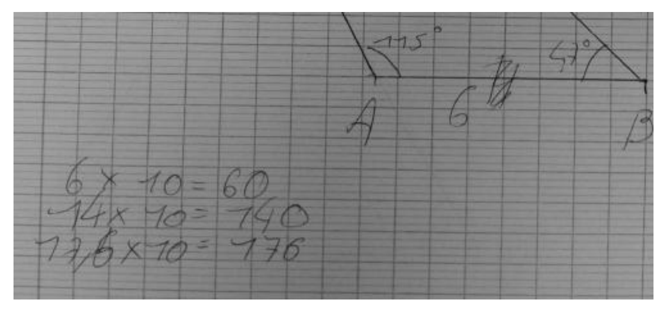
La consigne

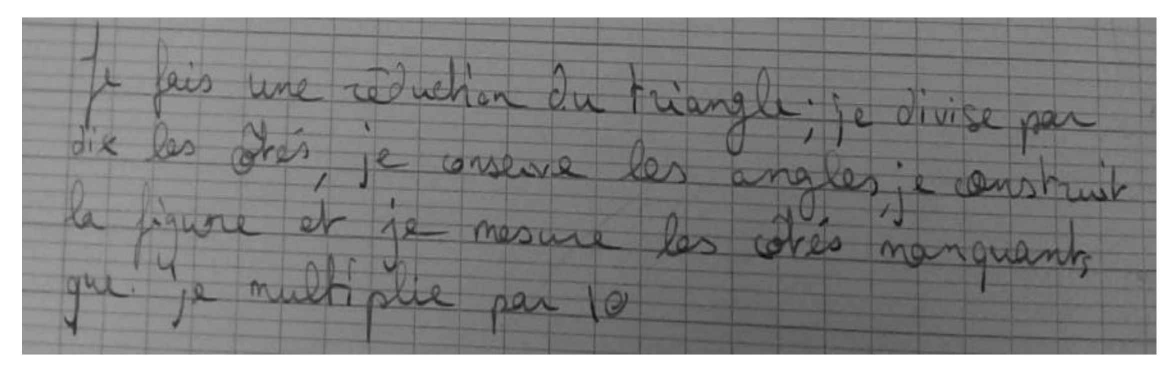
Étape 1

Le professeur trace au tableau d'un triangle ABC ayant un côté [AB] de 60 cm et deux angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ de 115° et 47°. Il demande aux élèves de trouver les longueurs des deux autres côtés du triangle qui est au tableau.

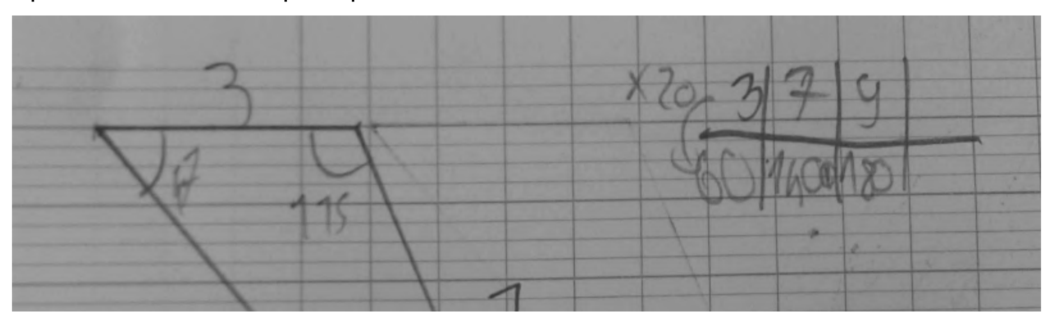
Les élèves sont d’abord décontenancés et pensent que ce n’est pas possible. Assez vite cependant, certains disent que « le triangle du tableau est proportionnel » à ceux de leur cahier ou « à l'échelle ».

Certains proposent de dessiner un triangle avec un côté de 6 cm ou de 10 cm pour multiplier les autres côtés qu’ils mesurent par 10 ou par 6.

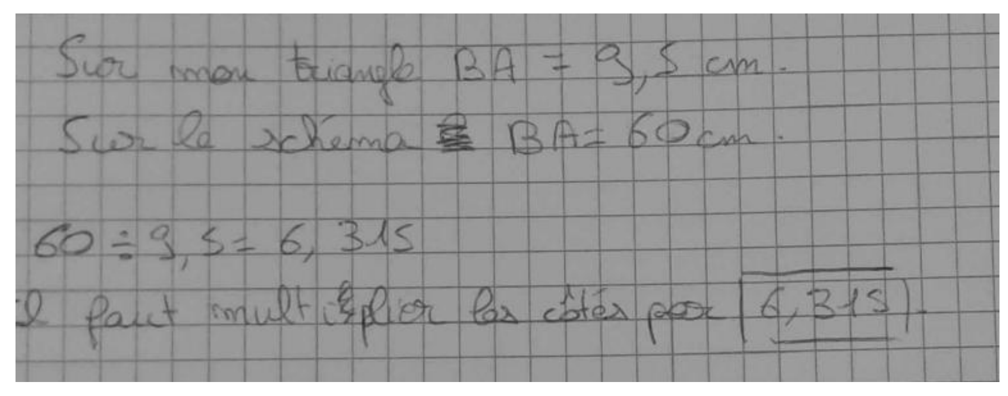




D’autres, qui ont des triangles avec des mesures pratiques, proposent de les utiliser. Par exemple, un côté de 3 cm permettra de multiplier par 20.



Quelques-uns utilisent le triangle déjà tracé malgré un coefficient peu pratique.



Les élèves vérifient ensuite si les mesures qu'ils ont trouvées sont assez proches des longueurs des côtés du triangle du tableau.

Dans certaines classes, ils ne sont pas étonnés des erreurs de mesure. Dans d'autres classes, des interrogations sur les différences obtenues suscitent un vrai débat entre erreur de construction, imprécision des mesures et du matériel.

La consigne (suite)

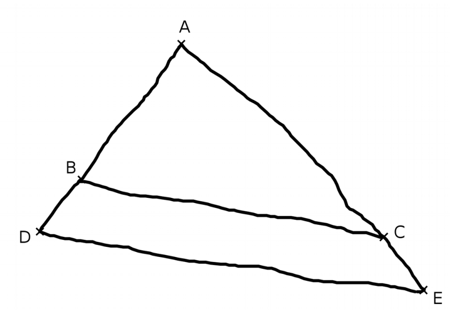
Étape 2 :

« On a deux triangles ABC et ADE tels que :

les points A, B, D et A, C, E sont alignés et (BC) et (DE) sont parallèles.

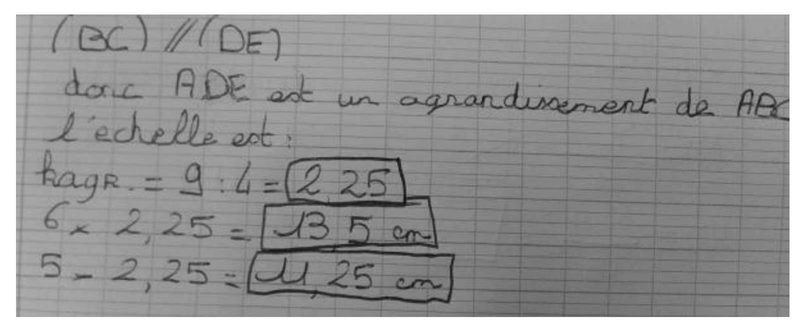
AD = 9 cm, AB = 4 cm, AC = 6 cm et BC = 5 cm.

Calculer les longueurs des côtés [AE] et [DE]. »



Les élèves continuent d'utiliser la conjecture émise à l'étape précédente puisque ces triangles ont les mêmes angles.

Certains utilisent le tableau de proportionnalité et le produit en croix pour trouver les deux longueurs demandées. D'autres calculent le coefficient d'agrandissement qui est ici décimal (2,25).



À ce stade,le professeur aide la classe à écrire la conjecture suivante : des triangles qui ont les mêmes angles ont les longueurs de leurs côtés qui sont proportionnelles.

L'objectif est maintenant de faire justifier dans un cas particulier la proportionnalité des longueurs des côtés des deux triangles. La propriété dite « des milieux » permet de le faire.

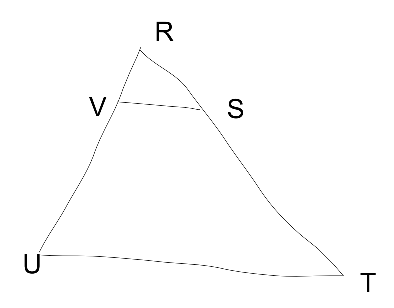
<u>La consigne (suite)</u>

<u>Étape 3</u>

« On a deux triangles RSV et RTU tels que les points
R, V, U et R, S, T sont alignés et (SV) et (TU) sont parallèles.

RU = 16 cm, RT = 10 cm et TU = 12 cm et RV = $\frac{1}{4}$ RU.

Calculer les longueurs des côtés [SV] et [RS]. »



En fonction du niveau de la classe, d'autres cas particuliers peuvent être justifiés en remplaçant par exemple $\frac{1}{4}$ par $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ ...

La propriété de Thalès (ou plutôt la propriété de « *proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine* » pour rester conforme aux programmes) peut alors être admise sous la forme :

deux triangles ABC et ADE pour lesquels les points A, B, D et A, C, E sont alignés et les côtés (BC) et (DE) parallèles, ont les longueurs de leurs côtés qui sont proportionnelles.

Ce qui sera favorablement illustré par le tableau de proportionnalité :

Triangle ABC	AB	AC	BC
Triangle ADE	AD	AE	DE

La propriété de Thalès, situation 3 : vers l'égalité des rapports

Il est possible de s'arrêter à la situation précédente en classe de quatrième mais nous pensons qu'il faut déjà initier la forme classique du « futur » théorème de Thalès de la classe de troisième avec l'égalité des rapports, forme qui est loin d'être évidente pour les élèves et parfois dépourvue de sens pour eux.

Cette situation 3 a pour objectif d'inciter les élèves à écrire les rapports de mesure lors d'une progression de plus en plus abstraite. L'étape 1 utilise un coefficient de réduction décimal et un coefficient d'agrandissement rationnel non décimal. Dans l'étape 2, l'écriture et la comparaison de quotients est nécessaire, certains de ces quotients étant rationnels non décimaux. Dans l'étape 3, les élèves sont incités à écrire des rapports avec des lettres et à traduire la proportionnalité par l'égalité de ces rapports.

La consigne

Étape 1

« Tracer un triangle ABC avec : AB = 8 cm, BC = 10 cm, AC = 9 cm.

Sur le segment [AB], placer le point M tel que AM = 6 cm.

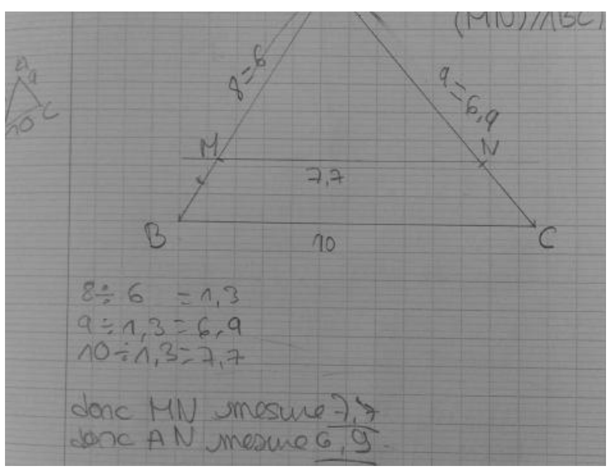
Tracer la parallèle à (BC) passant par M. Elle coupe [AC] en N.

Calculer les longueurs MN et AN. »

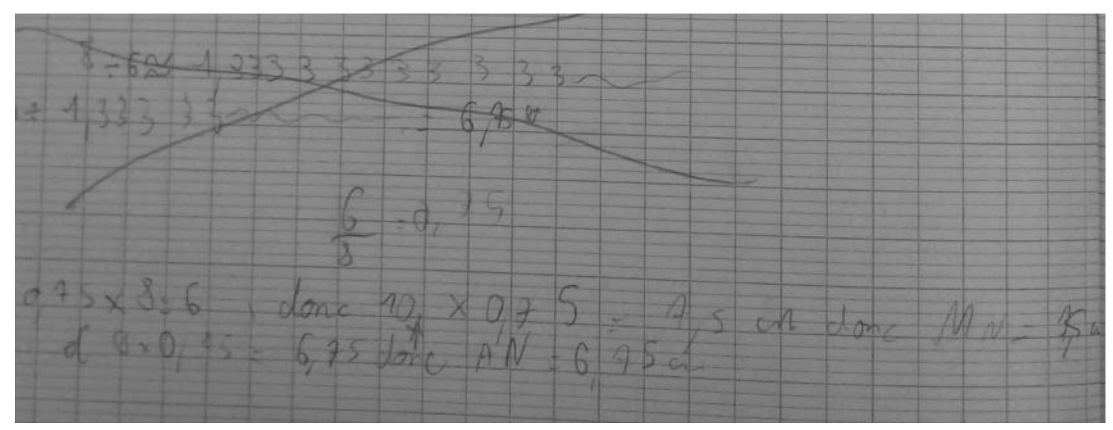
Faire tracer une figure en vraie grandeur peut permettre aux élèves de mesurer les longueurs. Ceux qui ne font que des mesures ne trouvent pas tous les mêmes résultats à cause de l'imprécision des tracés : pour une longueur égale à 6,75 cm, il y a un doute. Ceux qui font des calculs peuvent comparer leurs résultats avec les mesures.

A ce stade, forts de leur expérience de la propriété de Thalès, quasiment tous les élèves ont l'idée de la réduction, du coefficient qui est ici décimal (0,75) ou de l'agrandissement.

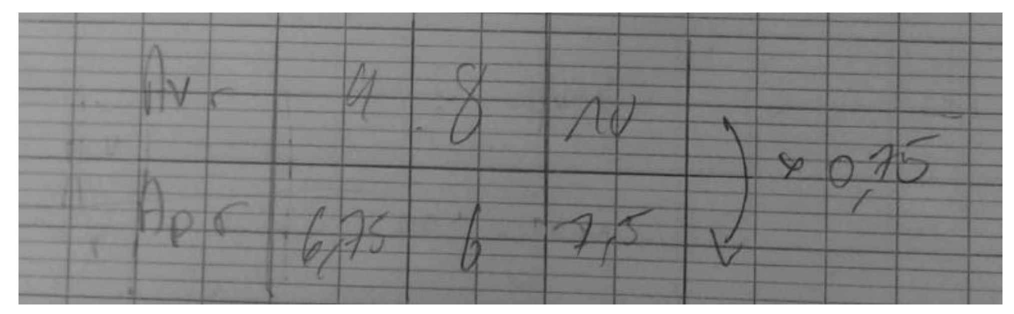
Certains font d'ailleurs des calculs en arrondissant le quotient $\frac{4}{3}$ et sont confortés par les résultats de leurs mesures. Des discussions s'engagent avec ceux qui ont choisi le coefficient de réduction (décimal).



Pour certains élèves, le coefficient d'agrandissement rationnel non décimal pose problème et ils préfèrent revenir au coefficient de réduction qui est décimal.



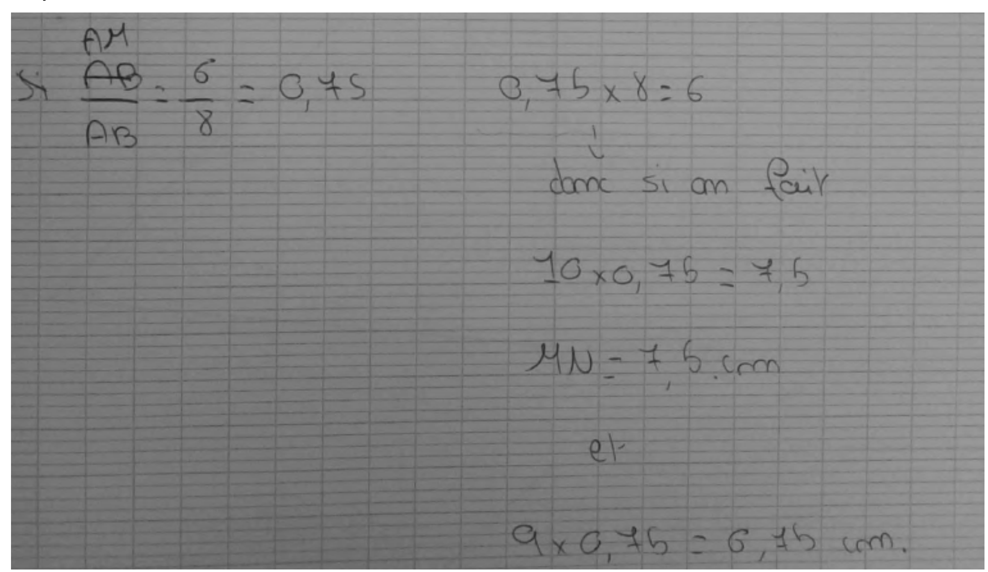
Quelques élèves préfèrent la proportionnalité dans un tableau qui leur évite d'utiliser le vocabulaire d'agrandissement et réduction.



Après cette première étape, pour inciter les élèves à utiliser l'écriture fractionnaire d'un quotient, le professeur demande comment obtenir les longueurs du triangle AMN à partir de celles du triangle ABC. Il s'agit d'un agrandissement à l'échelle $\frac{4}{3}$.

On ne passe pas encore à l'écriture avec les rapports des longueurs $\frac{AM}{AB}$ mais certains élèves commencent déjà à écrire le coefficient de réduction avec des lettres. Les variables didactiques sont choisies pour que ce quotient soit rationnel non décimal.

Ceci pourra orienter les élèves vers l'écriture de « rapports » : ils sont incités à vérifier que ce coefficient, trouvé avec deux longueurs correspondantes, est égal à ceux obtenus avec d'autres longueurs correspondantes.



La consigne (suite)

Étape 2

« Tracer un triangle DEF avec DE = 7 cm, EF = 9 cm et DF = 8 cm.

Sur le segment [DE], placer le point R tel que DR = 3 cm.

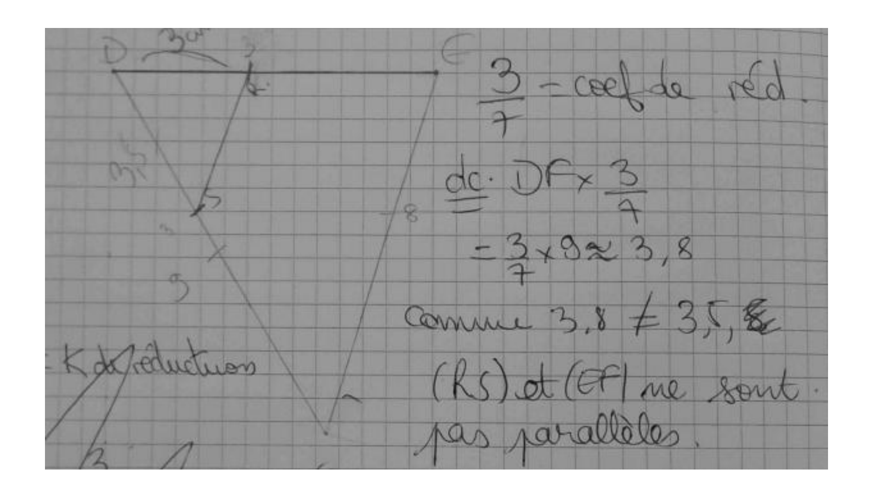
Sur le segment [DF], placer le point S tel que DS = 3,5 cm.

Les droites (RS) et (EF) sont-elles parallèles ? Le prouver ».

Le choix des variables didactiques est ici fondamental pour obtenir des droites semblant être parallèles.

Pour prouver leur réponse, les élèves peuvent utiliser « une partie de la contraposée du futur théorème de Thalès » . Ils peuvent aussi faire une sorte de raisonnement par l'absurde.

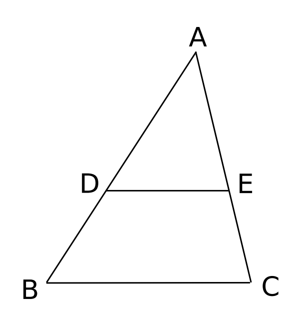
Le but principal est ici de leur faire écrire des rapports.



La consigne (suite)

Étape 3

« On sait que les points A, D, B et A, E, C sont alignés, que les droites (DE) et (BC) sont parallèles. Quelles conjectures pouvez-vous faire ? »



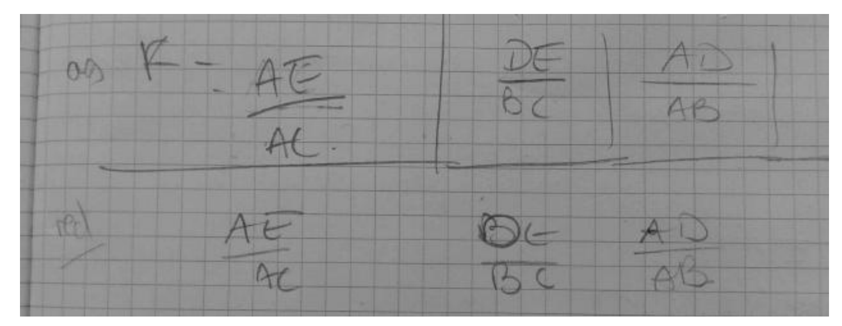
Les conjectures sont alors rapidement énoncées et justifiées :

- le triangle ADE est une réduction du triangle ABC,
- le triangle ABC est un agrandissement du triangle ADE,
- les angles des triangles sont les mêmes.

Le professeur demande alors :

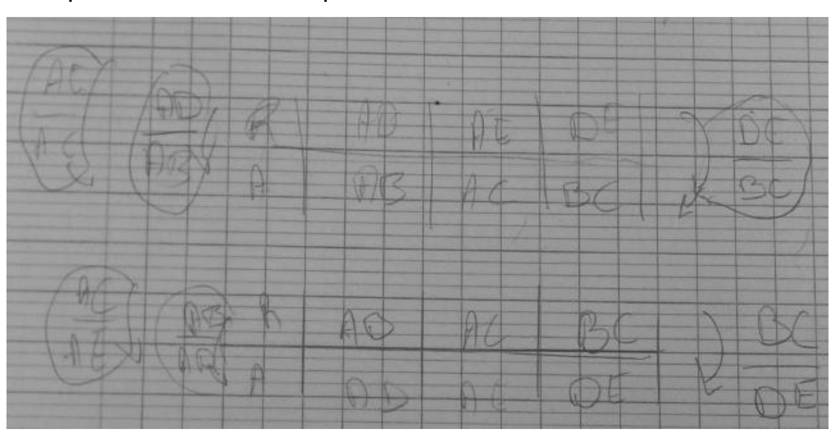
« Écrire, sans mesurer, le coefficient d’agrandissement ».

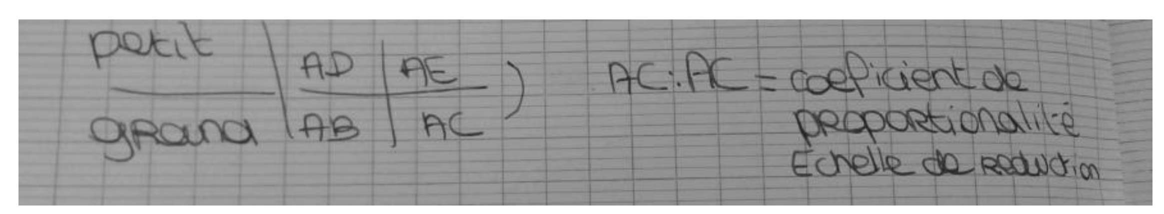
Certains élèves passent directement à l'écriture de ces rapports mais sans écrire l'égalité qui est loin d'être évidente pour eux.



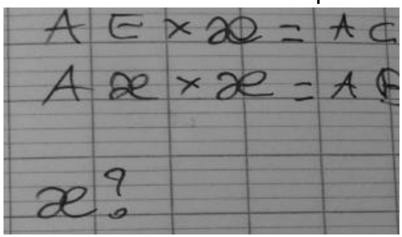
D'autres ont besoin du tableau pour se repérer et fournissent ainsi une méthode de recherche à ceux qui ne trouvent pas ces coefficients.

Avec parfois quelques imprécisions sur les opérations...



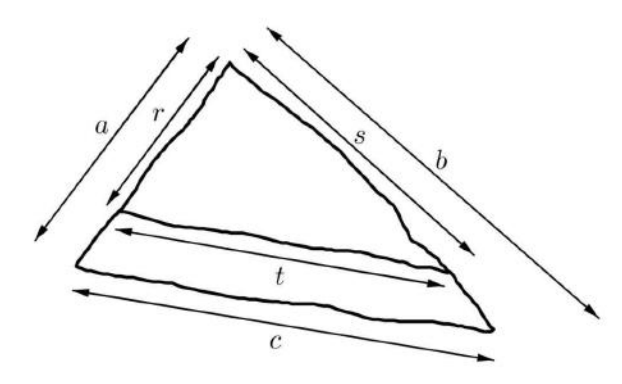


Quelques élèves ont encore du mal à reconnaître une multiplication à trou.



Un seul rapport est obtenu sur certains cahiers, les trois sont parfois proposés mais aucun élève ne passe à l'égalité des trois directement.

Pour conclure, en présentant aux élèves la figure ci-dessous et en précisant que les lettres représentent ici les longueurs des côtés, le professeur demande d'écrire de plusieurs façons les coefficients d'agrandissement et de réduction.



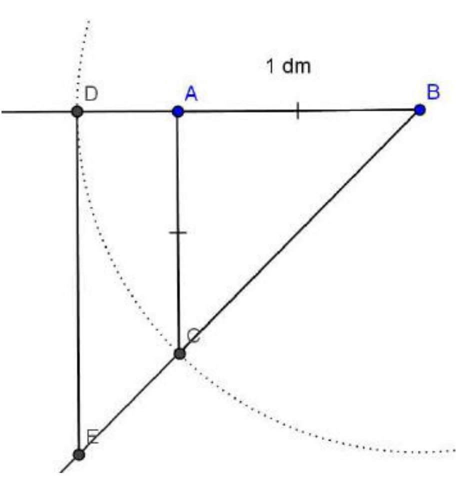
Ce travail pourra être complété en troisième par la situation suivante qui permet d'aborder le cas de coefficients non rationnels.

« Tracer un triangle isocèle ABC,rectangle en A tel que AB = AC = 1dm.

Sur la demi-droite [BA) placer un point D tel que BD = BC.

La perpendiculaire en D à (BA) coupe (BC) en E.

Quelle est la mesure de BE ? »



Les rapports valent alors $\sqrt{2}$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Troisième partie : le parcours

Avant d'aborder ce parcours, pendant le premier trimestre, il est indispensable de travailler avec les élèves la proportionnalité dans son ensemble et, en particulier, les procédures de calculs d'une quatrième proportionnelle.

En effet, elle est tout d'abord un outil essentiel dans les situations proposées, avant de redevenir objet d'étude avec sa caractérisation graphique.

Les théorèmes relatifs aux milieux des côtés d'un triangle doivent également être vus : ils permettent de justifier quelques cas particuliers pour la propriété de Thalès.

Le parcours débutera ensuite, au deuxième trimestre, par les situations 1 et 2 sur le thème de l'agrandissement d'une photo exposées dans la première partie.

Ces deux situations traitées à la suite l'une de l'autre permettent d'admettre de manière intuitive une première « propriété », la conservation « de la forme », et la remise en cause du modèle additif au profit du modèle multiplicatif.

Il est alors essentiel de poursuivre un travail spécifique sur l'agrandissement ou la réduction de figures qui a pour objectifs :

- la proportionnalité des longueurs des côtés ne suffit pas en général,
- le passage de la conservation « de la forme » à la conservation des mesures d'angles,
- la mise en évidence de la proportionnalité de toutes les dimensions.

Cela peut être fait par exemple en demandant aux élèves d'agrandir un losange donné sur une feuille blanche sans ses dimensions avec une échelle donnée, de réduire un trapèze donné sur une feuille blanche sans ses dimensions à partir de la réduction d'un de ses côtés déjà construit : ces situations ne seront pas détaillées ici, elles le seront dans une brochure à paraître avec l'ensemble du parcours. Elles permettent aussi d'amener naturellement la suite du parcours puisque les élèves décomposent souvent les figures en triangles, en traçant des diagonales.

Quels que soient les choix du professeur, il est important qu'à ce stade, un bilan « agrandissement-réduction de figures » soit institutionnalisé avec les élèves.

Il est donc temps maintenant d'étudier le cas particulier des agrandissements et réductions de triangles pour aboutir à la propriété de Thalès dans sa « version quatrième ».

C'est l'objet des trois situations exposées dans la deuxième partie. Les deux premières situations, qui amènent la configuration et la propriété comme agrandissement-réduction de triangles doivent s'enchaîner immédiatement, la troisième, qui initie la forme classique de la propriété avec l'égalité des rapports, peut être abordée avec un peu de recul.

Pour terminer, au troisième trimestre, la proportionnalité redeviendra un objet d'étude avec la situation 3 sur le thème de l'agrandissement d'une photo, exposée dans la première partie, pour aboutir à sa caractérisation graphique.

La propriété de Thalès est utilisée dans cette situation pour apporter des éléments de preuve, ce qui explique sa place dans le parcours. Les élèves ont à ce stade une certaine expérience des « découpages et empilements » ce qui facilite l'obtention des procédures et conjectures attendues dans cette situation.

Avant d'institutionnaliser cette caractérisation graphique, il sera peut-être utile de faire « réapparaître » les rectangles de la situation précédente lors d'exercices basiques sur le thème de la proportionnalité avec des représentations graphiques.

Voici ce parcours sous forme synthétique.

Premier trimestre	Procédures de calcul d'une quatrième proportionnelle
	Théorèmes relatifs aux milieux des côtés d'un triangle
Deuxième trimestre	Agrandissement d'une photo, situations 1 et 2
	Agrandissements et réductions de figures en général
	La propriété de Thalès, situations 1 et 2
	La propriété de Thalès, situation 3
Troisième trimestre	Agrandissement d'une photo, situation 3

Ce parcours permet une réelle activité mathématique des élèves, motivante, à la fois expérimentale et théorique : un véritable parcours d'étude et de recherche. Il donne du sens à la notion d'agrandissement-réduction et amène naturellement à s’intéresser au cas des triangles et donc à la propriété de Thalès.

Il s'intègre parfaitement dans une progression de quatrième en mettant en œuvre la proportionnalité, à la fois outil et objet d'étude, les écritures fractionnaires tout en préparant la leçon sur le cosinus.

Il se prolonge bien sûr en troisième avec le théorème de Thalès, la trigonométrie, la fonction linéaire...